

Correspondance galoisienne - TD 8

1. Dans tous les exemples des exercices 1–4 du TD 7, déterminer si les extensions E/F sont galoisiennes en utilisant tous les critères possibles.
2. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.
3. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$.
4. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$ où $\omega := e^{2\pi i/3}$.
5. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$.
6. Si E est le corps de décomposition du polynôme $x^3 - 1$, étudier la correspondance galoisienne pour l'extension E/\mathbb{Q} .
7. Si E est le corps de décomposition du polynôme $x^8 - 1$, étudier la correspondance galoisienne pour l'extension E/\mathbb{Q} .
8. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$.
9. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2$.
10. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$.
11. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension $\mathbb{F}_{32}/\mathbb{F}_2$.
12. Soit F un corps et $c \in F^*$. Soit E le corps de décomposition de $f(x) := x^n - c \in F[x]$. Si car F ne divise pas n et F contient une racine n -ième de l'unité primitive, montrer que :
 - (a) $E = F(a)$ où a est une racine de $f(x)$.
 - (b) E/F est galoisienne.
 - (c) $\text{Gal}(E/F)$ est un groupe cyclique.
 - (d) Si $f(x)$ est irréductible, $|\text{Gal}(E/F)| = n$.